

Primitives

1) Définitions et premiers exemples :

a) Équation différentielle de la forme $y' = f$:

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} .

On dit qu'une fonction g est une solution de l'équation différentielle $y' = f$ sur I si et seulement si g est dérivable sur I et, pour tout réel $x \in I$, $g'(x) = f(x)$.

Exemple : On considère l'équation différentielle $y' = 3x^2$ où $x \in \mathbb{R}$. C'est une équation différentielle de la forme $y' = f$ avec $f : x \mapsto 3x^2$.

La fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = x^3$ est dérivable sur \mathbb{R} comme fonction polynôme et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = 3x^2 = f(x)$$

La fonction g est donc une solution de l'équation différentielle $y' = 3x^2$.

b) Primitive d'une fonction :

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} .

On dit qu'une fonction F est une primitive de f sur I si et seulement si F est solution de l'équation différentielle $y' = f$ sur I .

Autrement dit, si et seulement si :

$$\text{pour tout réel } x \in I, F'(x) = f(x)$$

Exemples :

- On a vu que la fonction F définie sur \mathbb{R} par $F(x) = x^3$ était une primitive de la fonction $f : x \mapsto 3x^2$ sur \mathbb{R} .
- La fonction G définie sur \mathbb{R} par $G(x) = x^3 - 7$ est également une primitive de f .

En effet, G est dérivable sur \mathbb{R} comme fonction polynôme et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G'(x) = 3x^2 = f(x)$$

- La fonction H définie sur \mathbb{R} par $H(x) = x^3 + 5x^2 - 2x$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto 3x^2 + 10x - 2$ sur \mathbb{R} .

En effet, H est dérivable sur \mathbb{R} comme fonction polynôme et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$H'(x) = 3x^2 + 10x - 2 = h(x)$$

Propriété (admise) : Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I .

Exemple : La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable, donc continue sur $]0 ; +\infty[$.

Elle admet donc des primitives sur $]0 ; +\infty[$.

Une de ces primitives est F , définie sur $]0 ; +\infty[$ par $F(x) = \ln(x)$.

En effet, F est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et, pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $F'(x) = \frac{1}{x} = f(x)$.

Propriété : Soit f une fonction continue sur un intervalle I de \mathbb{R} .

Deux primitives de f diffèrent alors d'une constante.

Démonstration : Puisque f est continue sur I , elle possède des primitives sur I .

Soient F et G deux primitives de f sur I , on a donc :

$$\text{pour tout } x \in I , F'(x) = f(x) \text{ et } G'(x) = f(x)$$

Or, puisque F et G sont dérivables sur I , leur différence l'est aussi et, pour tout $x \in I$:

$$(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

La fonction $F - G$ possède donc une dérivée nulle sur I , c'est donc une fonction constante sur I .
Ainsi, il existe un réel k tel que, pour tout $x \in I$:

$$F(x) = G(x) + k$$

Deux primitives de f diffèrent donc d'une constante.

Propriété : Soit f une fonction continue sur un intervalle I de \mathbb{R} .

Soit F une primitive de f sur I , alors une fonction G est une primitive de f sur I si et seulement s'il existe un réel $k \in \mathbb{R}$ tel que $G(x) = F(x) + k$ pour tout $x \in I$.

Démonstration :

- \Leftarrow : La fonction $G : x \mapsto F(x) + k$ est bien une primitive de f sur I .

En effet, puisque F est dérivable sur I , alors, par somme, G l'est aussi et :

$$\text{pour tout } x \in I , G'(x) = F'(x) + 0 = f(x) \text{ car } F \text{ est une primitive de } f .$$

- \Rightarrow : D'après la propriété précédente, deux primitives de f diffèrent d'une constante.
Ainsi, si G est une primitive de f , alors il existe un réel k tel que :

$$\text{pour tout } x \in I , G(x) = F(x) + k$$

Exemple : On a vu que $F : x \mapsto \ln(x)$ était une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$.

Toutes les primitives de f sur $]0 ; +\infty[$ sont donc de la forme $G : x \mapsto \ln(x) + k$ pour $k \in \mathbb{R}$.

2) Primitives des fonctions usuelles :

Fonction f définie par	Primitive F de f définie par	Intervalle de validité
$f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax$	\mathbb{R}
$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	\mathbb{R}
$f(x) = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$	$F(x) = \frac{x^{-n+1}}{-n+1}$	$] -\infty ; 0[$ ou $] 0 ; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$	$] 0 ; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	\mathbb{R}
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$] 0 ; +\infty[$

Exemples :

- Une primitive de $f : x \mapsto -3$ sur \mathbb{R} est $F : x \mapsto -3x$.
- Une primitive de $g : x \mapsto x^7$ sur \mathbb{R} est $G : x \mapsto \frac{x^8}{8}$.
- Une primitive de $h : x \mapsto \frac{1}{x^5} = x^{-5}$ sur $] 0 ; +\infty[$ est $H : x \mapsto \frac{-x^{-4}}{4} = -\frac{1}{4x^4}$.

3) Recherche de primitives en identifiant des formes remarquables :

Propriétés : Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I , u une fonction dérivable sur I .

► Pour tout réel k , une primitive de $k \times f$ est $k \times F$ où F est une primitive de f sur I .

Démonstration : On dérive : $(k \times F)' = k F' = kf$, donc une primitive de kf sur I est kF .

Exemple : Une primitive de $f : x \mapsto -5x^2$ sur \mathbb{R} est $F : x \mapsto -5 \times \frac{x^3}{3}$.

► Une primitive de $f + g$ est $F + G$ où F est une primitive de f sur I et G est une primitive de g sur I .

Démonstration : On dérive : $(F + G)' = F' + G' = f + g$, donc une primitive de $f + g$ sur I est $F + G$.

Exemple : Une primitive de $f : x \mapsto x + \frac{1}{x}$ sur $] 0 ; +\infty[$ est $F : x \mapsto \frac{x^2}{2} + \ln(x)$.

► Une primitive de $u' \times e^u$ est e^u .

Démonstration : On dérive, par composition : $(e^u)' = u' e^u$, donc une primitive de $u' e^u$ sur I est e^u .

Exemple : Soit $f : x \mapsto 2x e^{x^2}$ définie sur \mathbb{R} .

La fonction f est de la forme $f = u' e^u$ avec $u : x \mapsto x^2$, donc une primitive de f sur \mathbb{R} est $F : x \mapsto e^{x^2}$.

► Pour tout entier positif n non nul, une primitive de $u' \times u^n$ est $\frac{u^{n+1}}{n+1}$.

Si de plus, u ne s'annule pas sur I , alors pour tout entier strictement négatif $n \neq -1$, une primitive de $u' \times u^n$ est $\frac{u^{n+1}}{n+1}$.

Démonstration : On dérive : $\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right)' = \frac{1}{n+1} \times (u^{n+1})' = \frac{1}{n+1} \times (n+1) \times u' u^n = u' u^n$, donc une primitive de $u' u^n$ sur I est $\frac{u^{n+1}}{n+1}$.

Exemples :

- Soit $f : x \mapsto 2x(x^2 - 1)^3$ définie sur \mathbb{R} .

La fonction f est de la forme $f = u' u^n$ avec $u : x \mapsto x^2 - 1$ et $n = 3$, donc une primitive de f sur \mathbb{R} est définie par $F(x) = \frac{1}{4} \times (x^2 - 1)^4$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- Soit g la fonction définie sur $] -1 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{3x^2}{(1+x^3)^5} = 3x^2 \times (1+x^3)^{-5}$.

La fonction g est de la forme $g = u' u^n$ avec $u : x \mapsto 1 + x^3$ et $n = -5$.

La fonction u ne s'annule pas sur $] -1 ; +\infty[$, donc une primitive de g sur $] -1 ; +\infty[$ est définie par $G(x) = -\frac{1}{4} \times (1+x^3)^{-4} = -\frac{1}{4(1+x^3)^4}$ pour tout $x \in] -1 ; +\infty[$.

► Si $u(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors une primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ est $2\sqrt{u}$.

Démonstration : On dérive : $(2\sqrt{u})' = 2(\sqrt{u})' = 2 \times \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{u'}{\sqrt{u}}$, donc une primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ sur I est $2\sqrt{u}$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{7x^6}{\sqrt{x^7}}$.

La fonction f est de la forme $f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u : x \mapsto x^7$ et $u(x) > 0$ pour tout $x \in]0 ; +\infty[$,
donc une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$ est la fonction F définie sur $]0 ; +\infty[$ par $F(x) = 2\sqrt{x^7}$.

► Si $u(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln(u)$.

Démonstration : On dérive : $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, donc une primitive de $\frac{u'}{u}$ sur I est $\ln(u)$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x}{3+x^2}$.

La fonction f est de la forme $f = \frac{u'}{u}$ avec $u : x \mapsto 3+x^2$ et $u(x) > 0$ pour tout $x \in]0 ; +\infty[$,
donc une primitive de $\frac{u'}{u}$ sur $]0 ; +\infty[$ est la fonction F définie sur $]0 ; +\infty[$ par $F(x) = \ln(3+x^2)$.